

《初等数论》教学改革中应重点关注的三个方面

李金蒋

(中国矿业大学(北京)理学院 北京 100083)

【摘要】《初等数论》是一门具有悠久历史的数学学科,同时也是数学类专业的必修课程之一,但目前我国高校《初等数论》课程的教学普遍存在一些问题。本文从转变教师教学观念、更新教学内容、改进教学方法三个方面对《初等数论》课程教学改革进行研究和探讨,并提出一些相应的教学改革措施,希望通过适当的改革提高本课程的教学质量和效果。

【关键词】初等数论;教学内容;教学方法;教学手段

数论是研究整数性质的一门很古老的数学分支,其初等部分是以整数的整除性为中心,包括整除性、不定方程、同余式、连分数、素数(即整数)分布以及数论函数等内容,统称《初等数论》。我国各高校的数学与应用数学专业大都开设有这门课程,数论之前常被认为是介绍一些基础知识、解决纯数学难题的工具。但随着计算机技术和信息科学的发展,信息安全这一重大问题被提出,数论为解决信息安全问题做出了巨大贡献,即提供了一种核心技术——公开密钥。此外,数论在组合学、编码学、最优化设计、算子理论等诸多领域都有着重要应用。因此《初等数论》课程的教学,“一方面要把课本上的知识传授给学生,另一方面也要为学生日后从事相关专业的研究打好基础”^[1]。本校《初等数论》是数学与应用数学专业的一门专业必修课,这门课程在大学第6-7学期开设,教学时数为48学时。与其它数学专业课程比起来看似《初等数论》较简单,但真正教好并不容易。目前高校中的《初等数论》课程教学存在“教学观念相对落后、教学内容相对陈旧、教学方法比较单一”这三大问题,应对这三大问题应站在时代发展的角度来重点关注^[1]。

本文结合本校数学专业学生的层次、从业方向、人生规划,就如何转变教师教学观念、更新教学内容、改进教学方法三个方面,对《初等数论》的教学改革谈谈看法。

一、转变教师教学观念

《初等数论》课程改革的首要任务是教师教学观念的转变。

(一) 教师应根据新的职业观念和考评模式来转变教学观念

前苏联教育学家苏霍姆林斯基说:“当一个学生跨进学校的大门成为你的学生时,他无限信任你,你的每句话对他来说都是神圣的真理,在他看来你就是智慧、理智和道德的典型”,这也说明了教师作为引导者的重要性。首先,教师不应该把向学生传授知识作为自己的唯一教学目标,必须转变思想,提倡学生积极参与、勤于动手、乐于动脑,努力培养创新型人才,使得学生具备较好的分析能力和解决实际问题的能力,主动获取新的知识并具备良好的交流与合作能力。

(二) 教师在教学过程中要注重逻辑推理

不断激发学生的学习积极性、主动性、好奇心,培养他们敢问、能问、多问“为什么”的习惯,使得抽象难懂的初等数论知识在课堂讨论中变得生动、直观、易懂。

(三) 教师还应该转变传统的考评制度思想^[2]

不应把考试作为对教师教学质量和对学生学习能力评价的唯一准则,而应在教学中注重对学生学习的“多元化综合考核”,摒弃传统的“平时学习放松、考前复习紧张、考中难免舞弊、考后马上遗忘”的不良学习现象。因此,改变传统的教学观念和改革现行的考评模式势在必行。

二、更新教学内容

初等数论课程改革的关键是教学内容的更新。

(一) 在教学内容上应增加数学史知识

除了教学《初等数论》的基本内容,还应适时

基金项目:国家自然科学基金青年科学基金(11901566),国家自然科学基金面上项目(11971476,12071238),中央高校基本科研业务费专项基金(2022YQLX05),中国矿业大学(北京)课程建设与教学改革项目(J210703)

作者简介:李金蒋(1990.5-),男,汉族,山东聊城人,博士研究生,副教授,研究方向:解析数论。

向学生介绍一些数论中的著名问题的起源和发展过程。如Fermat猜想, Fermat数, 哥德巴赫猜想, 孪生素数, 完全数和几乎半完全数, Mersenne数, 亲和数等, 让学生了解一些数论课程发展的过去和现状, 利于拓宽知识视野。

例如, 在讲解同余式时, 向学生介绍同余式最初产生的背景, 可引入《孙子算经》中提出的著名问题:“今有物不知其数, 三三数之剩二, 五五数之剩三, 七七数之剩二, 问物几何”或者通过鸡兔同笼问题:“今有雉兔同笼, 上有三十五头, 下有九十四足, 问雉兔各几何”引入。在学习不定方程时, 亦可通过一个数学史中的故事引入: 1637年, 法国数学家费马在阅读丢番图所著《算术》(拉丁文译本)的第二卷时, 曾在关于毕达哥拉斯三元数组的页面上写道:“不可能将一个立方数写成两个立方数的和; 或者将一个四次幂写成两个四次幂之和; 抑或是将一个高于二次的幂写成两个同次幂之和。”接着他又俏皮地写下一个附注:“我对此命题有一个十分美妙的证明, 这里空白太小, 写不下”。或是《九章算术》中的“五家共井”问题、《张丘建算经》中的“百钱买百鸡”问题等, 这些都是经典的不定方程问题。教师通过介绍知识点产生的历史背景及实际用途, 一定能吸引学生的注意力, 激发学生的学习兴趣, 同时也能提高学生的数学素养。

例如, 在讲解不定方程时, 介绍世界上最早研究不定方程的是我国的《周髀算经》, 比古希腊数学家丢番图研究不定方程还要早二百多年; 另外《孙子算经》也是世界上最早提出同余方程的研究巨著; 讲授奇数、偶数及质数时, 介绍我国著名数学家华罗庚、陈景润、潘承桐及王元等对数论发展做出的突出贡献。

(二) 教师在授课过程中应加强与数学竞赛和公务员考试有关内容的渗透^[3]

比如在奥林匹克数学竞赛中频繁出现不定方程和同余问题, 再比如, 2000年国家公务员考试的第50题“在一次国际会议上, 人们发现与会代表中有10人是东欧人, 有6人是亚太地区的, 会说汉语的有6人。欧美地区的代表占了与会代表总数的23%以上, 而东欧代表占了欧美代表的23%以上。试问参会代表人数是多少?”此题是考察初等数论中的不定方程。对于此类作为奥林匹克数学竞赛和公务员考试考察的重要知识点, 如果教

师能够在教学过程中有针对性的讲解, 并加强相关题目的练习, 一定能使学生全面的掌握知识点, 并能够灵活运用。

(三) 教师在教学过程中应适当介绍数论发展的现状、未来的发展方向以及最新的研究成果^[4]

传统教学模式认为, 本科教学的任务是把书本上的知识传授给学生, 而科研则是高层次人才的培养目标, 这种想法往往导致教师忽视科研对教学所产生的积极作用。在现代教育中, 教师应适当将数论最新的研究成果及研究方法融入到教学中去, 例如在讲解“引无数英雄竞折腰”的费马大定理时, 要向学生介绍此猜想产生的背景、研究过程及遇到的困难, 以及经过三百多年的努力, 这一问题于1994年被数学家Andrew Wiles彻底解决。在讲解黎曼- Zeta函数 $\zeta(s)$ 时, 介绍黎曼提出了有关素数分布的6个猜想: 1892年法国数学家阿达玛证明第1、3、4猜想, 1894年德国数学家曼高尔特证明了第2、6猜想。唯第5个猜想迄今未获证明, 这则猜想被称为“黎曼猜想”。结合最近的大热话题: 英国著名数学家、菲尔兹奖和阿贝尔奖双料得主迈克尔·阿蒂亚爵士(Michael Atiyah)于2018年9月24日在“海德堡获奖者”论坛上宣布他证明了“黎曼猜想”。这样的教学内容不仅能激发学生的学习热情, 而且能使更学生更全面、系统、彻底地掌握相关知识点, 还可以培养学生的数学素养、拓宽学生的视野。

(四) 教学内容安排

结合自己多年的教学实践经验, 并考虑到学生实际情况, 针对知识的系统性和实用性两方面就初等数论的教学内容和课时安排, 制定如下教学计划:

第一章 整数的整除性

讲授28学时, 习题课5学时。

本章的多数内容在中小学阶段接触过, 并且整数的整除性理论与多项式理论基本上是一致的, 因而略讲。本章的重点是整除、公因数、素数的概念及性质, 带余除法及辗转相除法, 求最大公因数的方法, 整数的素数分解定理, 函数 $[x]$ 、 $\{x\}$ 的概念及其应用; 难点是函数 $[x]$ 、 $\{x\}$ 的概念及其应用。

第二章 同余

讲授16学时, 习题课4学时。

本章的学习过程中要求了解整数同余的概念及同余的基本性质, 会利用同余简单验证整数加减乘积运算的结果; 理解剩余类、完全剩余系的概念,

熟练掌握判断完全剩余系、简化剩余系的方法；掌握欧拉函数的定义及基本性质；熟练掌握 Euler 定理、Fermat 定理在解决实际问题中的应用。学习的重点是剩余系的判定，欧拉函数的定义及性质，难点是剩余系的判定。

第三章 同余方程

讲授 10 学时，习题课 2 学时。

代数学中的一个主要问题就是求解代数方程，这不仅要求我们要对代数方程是否有解、有解的条件及如何求解做出回答，而且尽可能的情况下给出问题的求解公式。本章讨论的问题与此类似，即求解同余方程。主要研究一次同余方程和方程组的求解问题。学习的重点是中国剩余定理，求解三次以下的同余式，难点是中国剩余定理，模整数同余式与模素数同余式的关系。

第四章 不定方程

讲授 12 学时，习题课 2 学时。

不定方程是初等数论中最古老的一个分支，也是数论一个十分重要的研究课题。不定方程又称之为丢番图方程，是公元三世纪初，古希腊数学家丢番图曾经系统研究了一些不定方程问题。我国古代对不定方程的研究也很早，且研究的内容也非常丰富，在世界数学史上占有不可忽略的地位。例如《周髀算经》中的商高定理“勾三股四弦五”，《张丘建算经》中的“百钱买百鸡问题”及《孙子算经》中的“物不知其数问题”等等，驰名中外，影响深远。本章的学习重点是二元一次不定方程解的形式，二元一次不定方程有整数解的条件，求二元一次不定方程的解的方法；难点是不定方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的整数解的形式。

第五章 简单连分数

讲授 6 学时，习题课 2 课时。

本章主要内容及重难点是有限连分数与有理数互化；无限连分数、渐近连分数、循环连分数、无理数与无限连分数的互化及应用；证明任一实数均可以用有限或无限连分数表示。

三、改进教学方法

充分利用各种资源，将最新科研成果和学术思想融入到教学中，使学生及时掌握《初等数论》这门学科的研究发展动态，全面深刻地掌握本学科的专业知识，拓展学生视野，激发学生学习及创新的兴趣。同时，根据教学内容的不同灵活选择教学方式方法，做好与各学科的衔接工作，特别是与考研、

就业的衔接工作。

（一）注重习题的教学功能^[5]

有些定理的证明比较抽象，讲解时学生很难理解，但是采用特例法，以 $20!$ 中质因数 2 的次数的求法为例讲解，实践证明效果很好，充分体现了学生的思维从特殊到一般，再到特殊的发展规律。这对学理解抽象定理非常有利。

解题过程中要重视分析，使学生善于克服思维定势。初等数论中的许多题目，往往没有一个固定的解题模式，许多题形式上十分相似，而解题方法却大不相同，需要具体训练学生克服呆板性、增强灵活性。例如，证明形如 $4n-1$ 的素数有无穷多个，证明方法可用反证法，考虑如何证明形如 $4n+1$ 的素数有无穷多个。学生可能以为这两个结论的证明方法相似，同理可证，事实上这是很难的，因此要引导学生思考其它途径。

（二）开展专题讨论

由于初等数论与其他学科，如组合数学和密码学等联系密切，数论课题是很重要的研究课题，每年都有很多论文发表，但教材不可能及时补充进来，这需要教师及时补充，与时俱进，引进慕课等教学形式，采用专题讨论的形式有效地进行教学。如对于求不定方程 $x^2 + y^2 = 105$ 的质数解问题，一个边长为 20 的直角三角形的个数问题，同余方程的不同解法以及这些解法与高等代数的线性方程组等内容有哪些联系等。

采用专题讨论的形式，将学生分成不同小组，这样不仅能巩固课堂所学基础知识，而且能涉猎很多新知识，使学生领略数论知识的奥妙之处。提高学生素质，培养团结协作的精神，努力专研的态度，提高创新意识，最重要的是培养学生的自信心，这对以后的工作很有意义。

（三）适当扩展内容

每一章的教学之后附上在这方面有突出贡献的数学家的简介，以培养学生良好的师德及勇于探索的精神。如在第 1 章整除后附上华罗庚（华氏定理）或陈景润（陈氏定理）简介，培养学生的爱国热情。在第 2 章不定方程后附上毕达哥拉斯（中国勾股定理）或费马简介，在同余后附上欧拉简介，在同余方程组后附上我国古代数学家秦九韶简介等。这样在学习枯燥理论的同时学生感受到数学家所作出的努力。使数论这门课程更具有人文气息，培养学生良好的品德。

(四) 激发学生学习兴趣

初等数论是数学的一个源远流长的分支,它展示着近代数学中最典型、最基本的概念、思想、方法和技巧。初等数论不仅推动着数学的发展,而且其理论和方法在计算机科学、代数编码、密码学、计算方法等领域内得到了广泛的应用,成为数学、计算机科学等相关专业不可缺少的数学基础。根据初等数论这门课程的特点,教师在讲授过程中,可以穿插介绍数论中的许多著名问题,如费马大定理、梅森数问题、完全数问题、歌德巴赫猜想、孪生素数等问题,从而增加课堂教学的趣味性,调动学生学习的积极性。

初等数论本身有许多有趣应用,其许多内容与中学数学有直接联系,例如整除理论、同余理论、一次不定方程、排列与组合等等,尤其是初等数论中的许多思想和方法是解决中学数学竞赛问题、开展课外活动的重要来源。随着数学学科自身的发展和社会的不断进步以及信息时代的到来,数论学科越来越显示出其重要的理论意义和极为广阔的应用范围,它已成为数学专业毕业生知识结构中不可缺少的重要组成部分。

(五) 采用启发式教学^[6]

启发学生的积极思维是启发式教学方法的核心,引导学生主动获取知识,培养他们分析问题和解决问题的能力。在课堂讲授过程中,通过引导让学生自己去思考、去做、去说,启发学生善于提出问题。引导学生通过归纳、类比、举一反三等,提高他们分析问题、解决问题的能力。在初等数论教学中,采取启发式教学方法,对于数论中的问题和习题主要告诉学生怎样去想,从哪方面去想,从哪方面入手,怎样解决问题,而解题方法熟悉后的具体计算则少讲甚至不讲。例如,在求两个数的最大公约数时,就提问学生学过几种最大公约数的求法?在什么情况下用什么方法更好?本题应用哪种方法简便一些?通过这些提问,学生就会对求两个数的最大公约数掌握的更牢固。又如,在同余式化简中,我们提问学生当 n 较大时如何解?当 x 较大时如何解?当 x 与 n 都较大时如何解?通过一系列的提问,使学生不仅掌握一道题的解法,而且对这一类题都会迎刃而解,起到了举一反三、事半功倍的效果,从而有效地提高了学生分析问题和解决问题的能力。

(六) 作业布置要新颖,适当增加趣味性^[6]

学生完成作业多数是书后题,主要是加强对授课内容的掌握,但这样有些枯燥,体现不出数学生活性的一面,所以布置作业时精心设计,适当增加趣味性。

作业可以适当增加一些有代表性的小论文,如学习整除这一章,可以布置讨论整除理论在中学数学竞赛中的应用论文;学习高斯函数后,可以布置高斯函数的应用或无理数的证明方法等论文。通过布置小论文,能调动学生的积极性,激发学生认真思考,发挥他们的潜能,在写小论文过程中,鼓励学生敢于思考,善于思考,勇于探索,这对毕业以后的教学及科研都大有裨益。

四、结语

综上所述,通过对《初等数论》课程从教师教学观念、教学内容、教学方法三方面的改革,希望学生能够更好地掌握《初等数论》的知识,并能够将本课程所学到的知识真正运用到日后的工作和学习中。在教学的过程中,教师还应当考虑教学对象、教学资源等方面的特点不断探索、研究与改善《初等数论》的教学改革,加强学生对获取知识、理解知识、运用知识和创新能力的培养,这样才能提高学生的综合能力,才能达到良好的教学效果,为学生日后考研深造或工作岗位打好坚实的基础。

总之,教改工作是一个复杂的系统工程,如何强化学生的综合素质,更好地做到教与学的双赢,尚有许多实际问题需要进一步的研究与探索。

参考文献:

- [1]曾福庚.《初等数论》课程教学改革探析[J].琼州学院学报,2013,20(2):51-53.
- [2]祁兰.初等数论的教学实践与体会[J].科技信息,2009,31:931-932.
- [3]张四保.对初等数论课程教学的几点体会[J].首都师范大学学报(自然科学版),2012,33(6):9-12.
- [4]李秀丽.初等数论教学改革中应注意的几个问题[J].高师理科学刊,2017,37(3):80-82.
- [5]晏燕雄.关于《初等数论》课程改革的一些思考[J].重庆教育学院学报,2012,25(6):114-116.
- [6]覃学文.在“初等数论”教学中实施研究型教学的思考与实践[J].梧州学院学报,2011,21(2):100-104.